

Exo 5 Fiche HMM:

1) - les états cachés représentent les pièces P1 et P2

- Les symboles d'observation sont "Pile" et "Face"

2) - les états initiaux sont équiprobables $\Rightarrow \pi = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix}$

- Matrice de transition $A = \begin{matrix} & P1 & P2 \\ P1 & \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \\ P2 & \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \end{matrix}$

choix des pièces au hasard \Rightarrow

- Matrice d'émission $B = \begin{matrix} & Pile & Face \\ P1 & \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \\ P2 & \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} \end{matrix}$
 ← bien équilibré
 ← face 3 fois plus grande que pile.

3) - Pn (O = PPF):

$\alpha_1 = P_i$ initialisation $\alpha_1 = \pi \cdot B_i(P) = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,25 \\ 0,125 \end{bmatrix}$

$\alpha_2 = P$ $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 0,25 \\ 0,125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1875 & 0,1875 \\ 0,1875 & 0,1875 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,09375 \\ 0,046875 \end{bmatrix}$

$\alpha_3 = F$ $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 0,09375 \\ 0,046875 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 \\ 3/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0703125 & 0,0703125 \\ 0,0703125 & 0,0703125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 \\ 3/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,03515625 \\ 0,052734375 \end{bmatrix}$

$\gamma(O, PPF) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i = 0,03515625 + 0,052734375 = 0,087890625$

- Meilleures suites d'états (viterbi):

$\delta_1 = P$: $\delta_1 = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,25 \\ 0,125 \end{bmatrix}$ $\psi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\delta_2 = P$ $\delta_2 = \text{Max} \left[\begin{bmatrix} 0,25 \\ 0,125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \right] \cdot \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1/4 \end{bmatrix}$ $\psi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

max: $\begin{cases} 0,25 \times 0,5 = 0,125 \\ 0,125 \times 0,5 = 0,0625 \end{cases} \begin{cases} 0,25 \times 0,5 = 0,125 \\ 0,125 \times 0,5 = 0,0625 \end{cases}$

$\delta_2 = \begin{bmatrix} 0,125 \\ 0,125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0625 \\ 0,03125 \end{bmatrix}$

$\delta_3 = F$ $\delta_3 = \text{Max} \left[\begin{bmatrix} 0,0625 \\ 0,03125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \right] \cdot \begin{bmatrix} 0,5 \\ 3/4 \end{bmatrix}$ $\psi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Max: $\begin{cases} 0,0625 \times 0,5 = 0,03125 \\ 0,03125 \times 0,5 = 0,015625 \end{cases} \begin{cases} // \\ // \end{cases}$

$\delta_3 = \begin{bmatrix} 0,03125 \\ 0,03125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 \\ 3/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,015625 \\ 0,0234375 \end{bmatrix}$

$$P^* = \text{Max } S_3(i) = 0,0234$$

$$q_3^* = \text{arg Max } [S_3(i)] = 1$$

$$q_2^* = \Psi_3(q_3^*) = \Psi_3(1) = 1$$

$$q_1^* = \Psi_2(1) = 1$$

(\hookrightarrow) $S1 \rightarrow S1 \rightarrow S1$; $P1 P1 P1$ est le meilleur chemin.

tableau récapitulatif:

Résumé de toutes les valeurs trouvées précédemment \curvearrowright

4) $\pi?$:

sur les 6 tirages le premier est P1 3 fois/6
et le premier est P2 3 fois/6

$$\hookrightarrow \pi = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix}$$

B?: le nbr d'apparition de pile ou face pour chaque pièce / sur le nbr total d'émission pour chaque pièce

~~le nbr total d'émission = 6 x 3 = 18.~~

$$B = \begin{matrix} & P & F \\ \begin{matrix} P1 \\ P2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 4/9 & 5/9 \\ 4/9 & 5/9 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

ex: pour P1: nbr de tirage = 9, 4 fois pile

et 5 fois face

$$\hookrightarrow P1(P) = 4/9$$

$$P1(F) = 5/9$$

même chose

pour P2

5 pour P1 et 5 pour P2

A? :

mbr de transition total = ~~6~~ ~~6~~ transitions.

On relève le mbr de transitions entre 2 états

/ mbr total (12).

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} P_1 & P_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3/5 & 2/5 \\ 3/5 & 2/5 \end{bmatrix} \end{matrix}$$