exercice n°3 :

$$y[n]-\frac{3}{4}y[n-1]+\frac{1}{8}y[n-2]=x[n]+\frac{1}{8}x[n-1]. \longrightarrow (1)$$

1) La fonction de transfert $H(z)$:

$(1) \Rightarrow TZ\left[y[n]-\frac{3}{4}y[n-1]+\frac{1}{8}y[n-2]\right]=TZ\left[x[n]+\frac{1}{8}x[n-1]\right]$

$\Rightarrow Y(z)-\frac{3}{4}z^{-1}Y(z)+\frac{1}{8}z^{-2}Y(z)=X(z)+\frac{1}{8}z^{-1}X(z).$

(en appliquant le théorème de retard, voir résumé)

$\Rightarrow Y(z)\left[1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}\right]=X(z)\left[1+\frac{1}{8}z^{-1}\right].$

$\Rightarrow H(z)=\dfrac{Y(z)}{X(z)}$

$\Rightarrow H(z)=\dfrac{1+\frac{1}{8}z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}=\dfrac{z^2+\frac{1}{8}z}{z^2-\frac{3}{4}z+\frac{1}{8}}.$

Les pôles et les zéros + la région de convergence : RC.

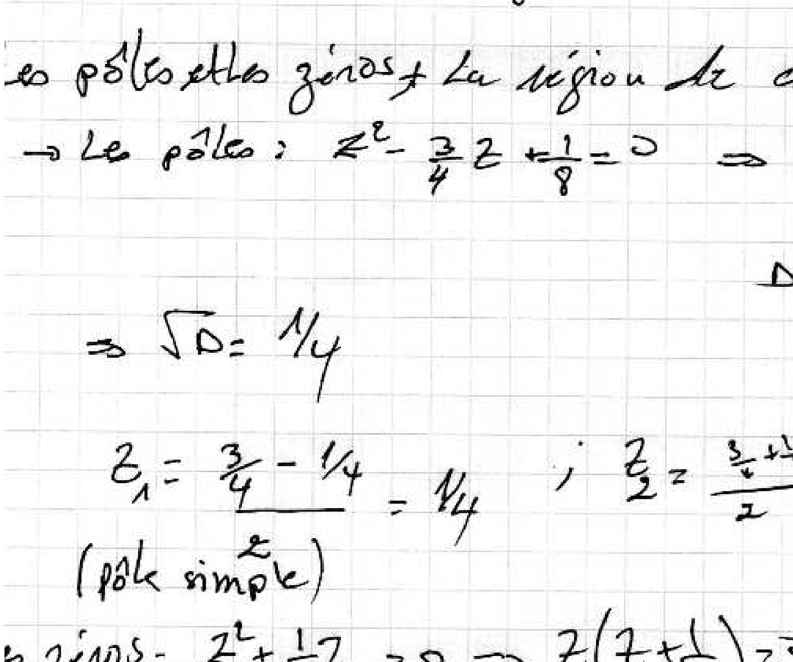
$\rightarrow$ Les pôles : $z^2-\frac{3}{4}z+\frac{1}{8}=0 \Rightarrow D=\left(\frac{-3}{4}\right)^2-4\cdot(1)\cdot\left(\frac{1}{8}\right)$

$D=\frac{9}{16}-\frac{4}{8}=1/16.$

$\Rightarrow \sqrt{D}=1/4$

$z_1=\dfrac{\frac{3}{4}-1/4}{2}=1/4$ (pôle simple) ; $z_2=\dfrac{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}{2}=1/2$. pôle simple.

Les zéros : $z^2+\frac{1}{8}z=0 \Rightarrow z\left(z+\frac{1}{8}\right)=0 \Rightarrow z=0$ ou $z=-\frac{1}{8}.$



Le système est stable car le cercle unitaire $\in$ à RC.

Le système est causal car l'équat° aux diff contient des états passés et présents) le système est recursif car $y[n]$ est en fonct de $y[n-1]$

→ La réponse impulsionnelle $h[n]$.

Trouver $h[0]$, $h[1]$, $h[2]$, $h[3]$, $h[4]$

$$y[n] = x[n] * h[n].$$

si $x[n] = \delta[n] \Rightarrow X(z) = 1$.

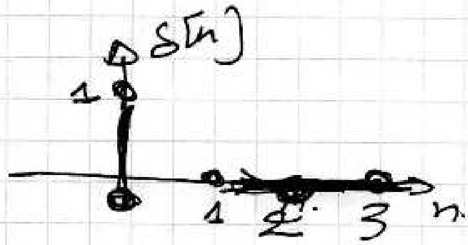
$$\Rightarrow Y(z) = X(z) \cdot H(z).$$

$$Y(z) = 1 \cdot H(z)$$

$$\Rightarrow Y(z) = H(z).$$

$$\Rightarrow y[n] = h[n].$$

$$h[n] = y[n] \Big|_{\text{si } x[n] = \delta[n]}$$



$$y[n] - \frac{3}{4} y[n-1] + \frac{1}{8} y[n-2] = x[n] + \frac{1}{8} x[n-1].$$

$$y[0] = h[0] = x[0] + \frac{1}{8} \underbrace{x[-1]}_{\to 0} + \frac{3}{4} \underbrace{y[-1]}_{\to 0} - \frac{1}{8} \underbrace{y[-2]}_{\to 0}$$

$$h[0] = 1$$

$$y[1] = h[1] = x[1] + \frac{1}{8} x[0] + \frac{3}{4} y[0] - \frac{1}{8} \underbrace{y[-1]}_{\to 0}.$$

$$= 0 + \frac{1}{8} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot 1$$

$$y[1] = \frac{1}{8} + \frac{3}{4} = \frac{1+2}{8} = \frac{3}{8}.$$

$$y[2] = h[2] = x[2] + \frac{1}{8} x[1] + \frac{3}{4} y[1] - \frac{1}{8} y[0].$$

$$= 0 + \left(\frac{1}{8} \cdot 0\right) + \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{8}\right) - \left(\frac{1}{8} \cdot 1\right)$$

$$= \frac{9}{32} - \frac{1}{8} = \frac{9-4}{32} = \frac{5}{32}.$$